

6 الدرس

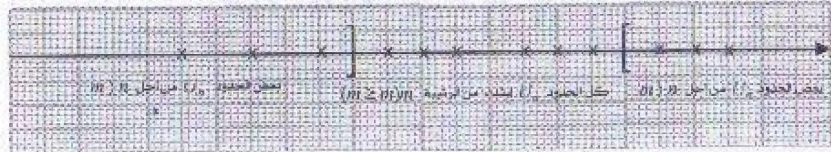
النهايات والمُتتاليات

1 - نهاية متتالية (تذكير)

1 - 1 نهاية حقيقية لمتتالية عددية

تعريف

نقول أن العدد الحقيقي ℓ نهاية لمتتالية (U_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل حدود هذه المتتالية. ابتداء من رتبة معينة ونكتب :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ أو $\lim U_n = \ell$ وفي هذه الحالة نقول أن للمتتالية (U_n) متقاربة.



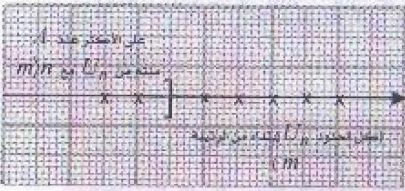
ملاحظة

- (1) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة
- (2) إذا كانت (U_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة)
- (3) كل متتالية حدودها موجبة لها نهاية موجبة أو معدومة.

مثال -

المتتاليات المعروفة بـ $U_n = \frac{1}{n}$, $V_n = \frac{1}{n^2}$, $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متتاليات متقاربة نحو الصفر لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$

2 - 1 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية



نقول أن متتالية (U_n) تقبل نهاية $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $[A, +\infty[$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

ويعني ذلك أن حدود المتتالية (U_n) تنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي A مهما كان كبيرا.

ملاحظة

الكتابة $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ تعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]-\infty, A]$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من رتبة معينة.

مثال -

المتتاليات $U_n = n^2$, $V_n = n^3$, $W_n = \sqrt{n}$, $S_n = \sqrt{n+1}$ متتالية لها النهاية $(+\infty)$ و بالتالي فهي متباعدة.

3 - 1 دراسة تقارب متتالية هندسية

دراسة تقارب متتالية هندسية كيفية ذات الحد العام aq^n يقودنا إلى دراسة تقارب المتتالية الهندسية ذات الحد العام q^n .

مبرهنة

q عدد حقيقي

- إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

- إذا كان $q = 0$ أو $q = 1$ فإن المتتالية q^n ثابتة

- إذا كان $0 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

- إذا كان $q \leq -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ غير موجود.

مثال -

(1) لتكن $U_n = 5 \left(\frac{-3}{4}\right)^n$

بما أن $1 > \frac{3}{4} > -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

(2) لتكن $V_n = 2 \times 3^n$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ ومنه (V_n) متتالية متباعدة.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بالعبارة $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ نهايتها 2 أوجد عدد طبيعي m بحيث $\forall n \geq m$ كل الحدود U_n تنتمي إلى المجال $I =]1,99; 2,01[$

✓ الحل

الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,99; 2,01[$ يعني أن $1,99 < \frac{2n+3}{n+2} < 2,01$ وبطرح 2 من

حدود هذه الأخيرة نجد $-0,01 < \frac{2n+3}{n+2} - 2 < 0,01$ أي $-0,01 < \frac{-1}{n+2} < 0,01$ وبالضرب في

(-1) نجد $-10^{-2} < \frac{1}{n+2} < 10^{-2}$ وبالضرب في $(n+2)10^2$ نجد

$(n+2)10^2 < 1 < (n+2)10^2$ (I)

التباينة $(n+2)10^2 < 1$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n إذن التباينة المضاعفة (I)

تكافئ $10^2 < n+2$ أي $n > 98$ منه نستنتج أن $m=98$

بالتالي المجال $]1,99; 2,01[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة 98.

تمرين تدريبي 2

ادرس تقارب المتتاليات $U_n = \frac{3}{4^n}$ ، $V_n = 5(\sqrt{2})^n$ ، $W_n = \frac{(-4)^n}{5}$ ، $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} U_p$

✓ الحل

نلاحظ أن (U_n) ، (V_n) ، (W_n) متتاليات هندسية

- بما أن $1 > \frac{1}{4} > -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ إذن (U_n) متقاربة نحو الصفر.

- بما أن $1 < \sqrt{2}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ إذن (V_n) متتالية متباعدة.

- بما أن $-1 \leq -4 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4)^n$ غير موجودة ومنه المتتالية (W_n) متباعدة.

- (U_n) متتالية هندسية بالتالي S_n مجموع n حد الأولى المتعاقبة من متتالية (U_n) حدها

الأول $U_0 = 3$ وأساسها $\frac{1}{4}$.

إذن $S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

- بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه المتتالية (S_n) متقاربة نحو العدد 4.

2 - نظريات حول النهايات

1-2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(n)$

مرهنة

f دالة معرفة على مجال $]a; +\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = f(n)$ و ℓ يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

مثال -

$U_n = \frac{2}{n+1}$ الدالة f العرقة بـ $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نهايتها الصفر لما $x \rightarrow +\infty$ وعليه فالمتتالية (U_n) نهايتها 0.

2-2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(V_n)$

مرهنة

f دالة معرفة على مجال I و كل حدود متتالية (V_n) تنتمي إلى I ، α ، β عدنان حقيقيان أو يمثلان $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha$ وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(V_n) = \beta$

مثال -

$V_n = \sqrt{3 + \frac{1}{n+1}}$ متتالية معرفة بـ

بوضع $U_n = 3 + \frac{1}{n+1}$ تصبح $V_n = \sqrt{U_n}$ وبالتالي $V_n = f(U_n)$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{3}$

نتيجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_{n+1} = f(U_n)$ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell = f(\ell)$ (حل لـ $x = f(x)$)

الإثبات

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ وإذا كانت f مستمرة عند ℓ ($\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$) في المبرهنة السابقة تسمح لنا بالتأكد أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = f(\ell)$ ومن جهة أخرى المتتالية (U_{n+1}) نهايتها ℓ لأن حدودها هي نفس حدود المتتالية (U_n) ما عدا U_0 وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$ فإن المتتاليتين (U_n) و (U_{n+1}) متساويتان وبالتالي لهما نفس النهاية أي $\ell = f(\ell)$

مثال -

(U_n) متتالية متقاربة معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $U_{n+1} = \sqrt{3+U_n}$ $U_0 = 2$ اوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

الحل ✓

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{3+x}$ ومنه $U_{n+1} = f(U_n)$ بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell$ و $\ell \in \mathbb{R}$ وبما أن f مستمرة عند ℓ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = f(\ell)$

إذن ℓ هو جذر للمعادلة $x = f(x)$.

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 3 = 0$ و $x \geq 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13$$

$\Delta > 0$ ومنه المعادلة $x^2 - x - 3 = 0$ لها حلان هما $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

بما أن $x_2 < 0$ فإنه مرفوض وبالتالي $\ell = x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ إذن}$$

3-2 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

القواعد المتعلقة بنهايات الدوال عند $(+\infty)$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى المتتاليات وخاصة نهاية الجمع و الجداء وحاصل قسمة متتاليتين. أما بالنسبة إلى نهاية المتتالية باستعمال الحصر لدينا المبرهنات التالية:

مبرهنة 1

(U_n) ، (V_n) ، ثلاث متتاليات عددية ، ℓ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $W_n \leq U_n \leq V_n$ وإذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

مبرهنة 2

ℓ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $|U_n - \ell| \leq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

مبرهنة 3

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان. إذا كان من أجل كل $n \geq m$ لدينا $U_n \geq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$. إذا كان من أجل كل $n \geq m$ لدينا $U_n \leq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

تمرين تدريبي 1

ادرس تقارب المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \frac{2n + \cos n}{2n - \sin n}$

الحل ✓

- من أجل كل عدد طبيعي لدينا $-1 \leq \cos n \leq 1$ إذن $-1+2n \leq 2n + \cos n \leq 1+2n$ (1)

- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq \sin n \leq 1$ إذن $-1+2n \leq 2n - \sin n \leq 1+2n$

و بما أن حدود التباينة الزووجة موجبة فإنه نستنتج بالقلب

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{2n - \sin n} \leq \frac{1}{-1+2n}$$

بضرب حدود التباينتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد ،

$$\frac{-1+2n}{1+2n} \leq \frac{2n + \cos n}{2n - \sin n} \leq \frac{1+2n}{-1+2n}$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2n}{-1+2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1+2n}{1+2n} = 1$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

تمرين تدريبي 2

(V_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $V_0 = 1$ و $V_{n+1} = \sqrt{V_n + 6}$
 (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 \leq V_n \leq 3$
 (ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = \frac{V_n}{n+2}$

✓ الحل

(أ) نسمي الخاصية " $0 \leq V_n \leq 3$ " p_n صحيحة لأن $V_0 = 1$ و $0 \leq 1 \leq 3$
 - نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي $n \geq 0$ أي $0 \leq V_n \leq 3$
 ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $0 \leq V_{n+1} \leq 3$
 من الفرض لدينا $0 \leq V_n \leq 3$ وبإضافة 6 إلى حدود هذه المتباينة نجد $6 \leq V_n + 6 \leq 9$
 بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{3} \leq \sqrt{V_n + 6} \leq 3$ أي $0 \leq \sqrt{3} \leq V_{n+1} \leq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة.
 إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) بما أن $0 \leq V_n \leq 3$ فإن $0 \leq \frac{V_n}{n+2} \leq \frac{3}{n+2}$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n+2} = 0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n+2} = 0$
 و عليه فالمتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تمرين تدريبي 3

ادرس تقارب المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة،
 $V_n = 3^{n+2} - 5^n$

✓ الحل

المتتاليتان اللتان جدهما العام 5^n و 3^{n+2} هندسيتان أساسهما على الترتيب 5 و 3
 وبما أن $5 > 1$ و $3 > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+2} = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ وبالتالي نستنتج،
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

$$V_n = 3^n (3^2 - \frac{5^n}{3^n}) = 3^n (9 - (\frac{5}{3})^n)$$

بما أن $1 < \frac{5}{3}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{5}{3})^n = +\infty$ ومنه نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [9 - (\frac{5}{3})^n] = -\infty$

و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ فإنه حسب قاعدة نهاية جداء متتاليتين نستنتج:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times (9 - (\frac{5}{3})^n) = -\infty$$

و عليه (V_n) متباعدة.

3 - تقارب المتتاليات الرتيبة

3-1 متتالية محدودة (من الأعلى - من الأسفل)

- القول أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى يعني أنه يوجد عدد حقيقي M بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \leq M$.
 يسمى M عنصرا حاداً من الأعلى للمتتالية (U_n).
 - القول أن للمتتالية (U_n) محدودة من الأسفل يعني أنه يوجد عدد حقيقي m بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq m$.
 يسمى m عنصراً حاداً من الأسفل.
 - إذا كانت (U_n) محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها محدودة.

ملاحظة

(1) إذا كانت متتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد M فإن كل الأعداد الحقيقية الأكبر من M هي أيضاً عناصر حادة لـ (U_n).
 نعرف بنفس الكيفية العناصر الحادة من الأسفل.
 (2) نفي القضية "المتتالية (U_n) غير محدودة من الأعلى" يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد U_{n_0} بحيث $U_{n_0} > A$.

مثال -

(1) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n = \sin n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq \sin n \leq 1$
 (2) المتتالية $V_n = (-1)^n \cos n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq V_n \leq 1$
 (3) المتتالية $W_n = -n^2$ محدودة من الأعلى لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $W_n \leq 0$

3-2 تقارب المتتالية الرتيبة

- المتتالية (U_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \leq U_{n+1}$

وبما أن للمتتالية (U_n) متزايدة و كل الحدود (U_n) أصغر من A فإن المجال $[A - \alpha, A + \alpha]$ يشمل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة p وهذا صحيح من أجل كل α (أي من أجل كل مجال مركزة A).
إذن للمتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي A .
(2) نبين بنفس الطريقة أن كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة.

ملاحظة

هذه البرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب متتالية و لكن لا تعطينا قيمة نهايتها.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ و $U_0 = 1$.
(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < U_n \leq 2$.
(2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج تقاربها واحسب نهايتها.

الحل

(1) نسمي الخاصية " $0 < U_n \leq 2$ " p_n .
 p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1$ و $0 < 1 \leq 2$.
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $0 < U_n \leq 2$.
و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$.
من الفرض لدينا $0 < U_n \leq 2$ وبإضافة 2 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $2 < U_n + 2 \leq 4$.
وبالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{2} < \sqrt{U_n + 2} \leq 2$ أي $0 < \sqrt{2} < U_{n+1} \leq 2$.
ومن هنا p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
من المتباينة $0 < U_n \leq 2$ نستنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى.

(2) (U_n) متزايدة هذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} - U_n \geq 0$.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{(\sqrt{2 + U_n} - U_n)(\sqrt{2 + U_n} + U_n)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2 + U_n - U_n^2}{\sqrt{2 + U_n} + U_n} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n}$$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ فإن $0 < U_n + 1$ و $U_n - 2 \leq 0$ وبالتالي:

$$\frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n} \geq 0 \text{ أي } U_{n+1} - U_n \geq 0 \text{ مما يدل على أن } (U_n) \text{ متزايدة على } \mathbb{N}$$

- بما أن (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ .

$$\ell \text{ جذر للمعادلة } x = f(x) \text{ حيث } f(x) = \sqrt{2 + x}$$

- المتتالية (U_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq U_{n+1}$.
- المتتالية (U_n) رتيبة إذا و فقط إذا كانت متزايدة أو إذا كانت متناقصة.

مثال -

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = -n^2 + n + 1$
من أجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = -(n+1)^2 + (n+1) + 1$
إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -2n$
من أجل كل n من \mathbb{N} يكون $-2n \leq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وبالتالي (U_n) متناقصة.

مبرهنة 1

- كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى نهايتها $(+\infty)$
- كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأسفل نهايتها $(-\infty)$

الإدبات

نثبت القسم الأول من المبرهنة (1).
لتكن (U_n) متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى.
- (U_n) غير محدودة من الأعلى هذا يعني أنه مهما يكن العدد الحقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد U_p من المتتالية (U_n) بحيث $U_p > A$ (1)
- (U_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $p > n$ يكون $U_n \geq U_p$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل $p > n$ يكون $U_n > A$
و هذا يعني أنه ابتداء من الرتبة P كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى مجال $[A, +\infty)$
مما يعني أن نهاية (U_n) هي $+\infty$

مبرهنة 2

- كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
- كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

الإدبات

(1) بما أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \leq M$. عندئذ يوجد عدد حقيقي A و هو أصغر العناصر الجادة لـ U_n .
و عليه فكل مجال من الشكل $[A - \alpha, A + \alpha]$ حيث $0 < \alpha$ يشمل على الأقل حد U_p من المتتالية (U_n) .

لأنه إذا كان هذا المجال لا يشمل أي حد U_p فإن كل الحدود U_n تقع على يسار $A - \alpha$ وهذا يعني أن $A - \alpha$ عنصر حاد لـ (U_n) مما يخالف الفرض كون A هو أصغر العناصر الجادة الكبرى لـ (U_n) .

$$x = f(x) \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{يكافئ } x = -1 \text{ أو } x = 2$$

وبما أن حدود المتتالية موجبة فإن نهايتها موجبة وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

تمرين تدريبي 2

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } u_0 = 2 \text{ وبالعلاقة } U_{n+1} = \frac{U_n}{3+2U_n}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f: x \rightarrow \frac{x}{3+2x}$ على $[0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم استنتج نهايتها

✓ الحل

(1) نسمي الخاصية " $U_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ فرضاً

وبضرب طرفي المتباينة في 2 نجد $2U_n > 0$ وبإضافة 3 نجد $3+2U_n > 3 > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ منه p_{n+1} صحيحة

وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ لأن $D_f \subset [0, +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \frac{3}{(2+3x)^2}$ إذن $f'(x) > 0$

وبالتالي f دالة متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$

إذا كان $U_{n+1} = f(U_n)$ و f متزايدة فإن المتتالية (U_n) رتيبة لكن $U_1 = \frac{2}{7}$ و

$$U_1 - U_0 \leq 0$$

إذن يمكن أن نخمن أن (U_n) متناقصة.

نبرهن بالتراجع أن (U_n) متناقصة.

نسمي الخاصية " $U_{n+1} \leq U_n$ "

- من أجل $n=0$ صحيحة لأن $U_1 - U_0 \leq 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $U_{n+1} \leq U_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من الفرض لدينا $U_{n+1} \leq U_n$

وبما أن f متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

أي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n تكون p_n صحيحة.

(3) بما أن (U_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

حيث ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$

$$x = \frac{x}{3+2x} \text{ تكافئ } x = f(x)$$

يكافئ $(x=0)$ أو $(x=-1)$

بما أن $x \geq 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

4 - متتاليات من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

1 - 4 التمثيل البياني للمتتالية (U_n)

(U_n) متتالية حددها الأول U_0 و $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس.

نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل

ثم نعلم النقطة A_0 من (C_f) ذات الفاصلة U_0

و الترتيب $U_1 = f(U_0)$

نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1

هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = x$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = U_1$.

النقطة A_1 ذات الفاصلة U_1 و الترتيب $U_2 = f(U_1)$ الناتجة من تقاطع $x = U_1$ مع (C_f)

نعلم العدد U_2 على محور الفواصل كما في الحالة السابقة و هكذا دواليك.

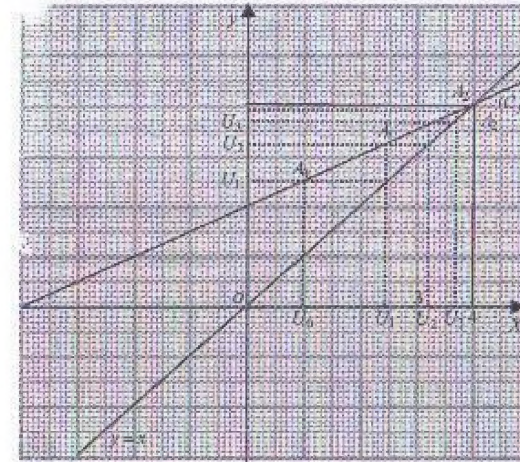
مثال:

مثل بيانها الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 ثم أعط تخميناً حول اتجاه تغير و نهاية

المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$ و $U_0 = 1$

✓ الحل

نرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين (d) و (Δ) ذوي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$ و $y = x$ على الترتيب.



- نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل ثم نعلم النقطة A_0 من (d) ذات الفاصلة U_0 وترتيبها $U_1 = f(U_0)$ الناتجة من تقاطع (d) مع المستقيم ذي المعادلة $x = U_0$.
- نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = U_1$ مع (Δ) .
- نعلم النقطة A_1 الناتجة من تقاطع المستقيم ذي المعادلة $x = U_1$ و (d) .
ترتيبية النقطة A_1 هي $U_2 = f(U_1)$.

- نعلم U_2 على محور الفواصل حيث U_2 هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = U_2$ مع المستقيم (Δ) وهكذا نعلم حدود المتتالية (U_n) .
نلاحظ من الشكل أن الحدود U_0, U_1, U_2, \dots تقترب من فاصلة نقطة تقاطع (d) مع (Δ) ونلاحظ أيضا أن المتتالية (U_n) متزايدة.
أي أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$ (لأن فاصلة نقطة التقاطع هي 4)

4-2 دراسة المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = aU_n + b$

نلاحظ أن (U_n) معرفة بالشكل $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث $f(x) = ax + b$

• حالة $a = 1$:

$$U_{n+1} = U_n + b$$

- إذا كان $b = 0$ فإن (U_n) ثابتة

- إذا كان $b \neq 0$ فإن (U_n) متتالية حسابية أساسها b فهي متباعدة.

• حالة $a \neq 1$ و $a \neq -1$

- لحساب الحد العام للمتتالية (U_n) العرقة بالعلاقة $U_{n+1} = aU_n + b$ نعرف متتالية (V_n)

حيث $V_n = U_n - \alpha$ ونختار α حتى تكون (V_n) هندسية.

و دراسة تقارب المتتالية (U_n) تؤول إلى دراسة تقارب (V_n) .

بما أن $a \neq 1$ فإن للمستقيمين $(D): y = x$ و $(d): y = ax + b$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها α .

• في حالة $a = -1$ يكون $U_{n+1} = -U_n + b$

$$U_3 = -U_2 + b = U_1, \quad U_2 = -U_1 + b = U_0, \quad U_1 = -U_0 + b$$

$$U_4 = -U_3 + b = U_0$$

نلاحظ أنه إذا كان n زوجي فإن $U_n = U_0$ وإذا كان n فردي $U_n = -U_0 + b$

- إذا كان $b = 0$ و $U_0 = 0$ فإن المتتالية (U_n) معدومة

- إذا كان $U_0 \neq 0$ فإن $U_n = U_0$ إذا n زوجي

و $U_n = -U_0 + b$ إذا كان n فردي

وبالتالي المتتالية (U_n) ليست لها نهاية. إذن فهي متباعدة.

مثال -

لتكن (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

و (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

(1) عين نقطة تقاطع المستقيمين $y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ولتكن α فاصلتها.

(2) بين أن المتتالية (V_n) هندسية بطلب تعيين أساسها.

(ب) أوجد نهاية (V_n) ثم استنتج نهاية (U_n) .

✓ الحل

(1) لتكن $M(x, y)$ نقطة تقاطع المستقيم $y = x$ و $y = -\frac{1}{2}x + 3$: (D) مع المستقيم $y = -\frac{1}{2}x + 3$: (d) .

فاصلة النقطة M تحقق $-\frac{1}{2}x + 3 = x$ تكافئ $x = 2$

إذن $\alpha = 2$ وهي القيمة المطلوبة.

(2) (1) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $V_{n+1} = qV_n$

$$V_{n+1} = (-\frac{1}{2}U_n + 3) - 2 = -\frac{1}{2}(V_n + 2) + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n - 1 + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$

(ب) بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = 1$

$$V_n = (-\frac{1}{2})^n$$

وبما أن $1 > -\frac{1}{2} > -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

من المساواة $V_n = U_n - 2$ نجد $U_n = V_n + 2$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$$

إذن (U_n) متقاربة نحو 2.

5 - المتتاليات المتجاورة

1-5 دراسة التقارب

مثال -

في الجدول الآتي تظهر في العمودين B و C ستة حدود لمتتاليتين (U_n) و (V_n) على التوالي. في العمود A يوجد دليل كل حد نلاحظ أن $U_0 = 1$ و $V_0 = 12$.

حجنا

- B_2 في الخلية $= (B_1 + 2 \cdot C_1) / 3$

- C_2 في الخلية $= (B_1 + 3 \cdot C_1) / 4$

- D_2 في الخلية $= C_2 - B_2$

	A	B	C	D
1	0	1	12	11
2	1	8.333	9.250	0.91
3	2	8.9444	9.020825	0.07638
4	3	8.995364	9.001728	0.0006365
5	4	8.9995981	9.00013775	0.00053916
6	5	8.9999578	9.000002838	0.00004503

(1) أعط عبارة U_{n+1} و V_{n+1} بدلالة U_n و V_n

(2) أعط تخميناً حول اتجاه تغير (U_n) و (V_n) .

ما هو التخمين حول نهاية $(V_n - U_n)$ ؟

(3) لتكن (W_n) متتالية حيث $W_n = 3U_n + 8V_n$ بين أن (W_n) ثابتة.

- إذا فرضنا أن (U_n) و (V_n) تقتربان من نفس النهاية ℓ احسب القيمة الدقيقة لهذه النهاية باستعمال (W_n) .

✓ الحل

$$(1) \text{ من العطايات } U_2 = \frac{U_1 + 2V_1}{3} \text{ و } V_2 = \frac{U_1 + 3V_1}{4}$$

وعليه عبارة U_{n+1} و V_{n+1} تظهر بـ $U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$ و $V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$

(2) نلاحظ من الجدول أن للمتتالية (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة. ونلاحظ أيضاً أنه كلما

كبر n فإن $V_n - U_n$ تؤول إلى الصفر و منه يمكن أن نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

(3) إثبات أن (W_n) ثابتة

$$W_{n+1} - W_n = (3U_{n+1} + 8V_{n+1}) - (3U_n + 8V_n) \\ = 3\left(\frac{U_n + 2V_n}{3}\right) + 8\left(\frac{U_n + 3V_n}{4}\right) - 3U_n - 8V_n = 0$$

و منه للمتتالية (W_n) ثابتة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $W_n = W_0 = 3U_0 + 8V_0 = 99$

- بما أن (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس نهاية ℓ فإن:

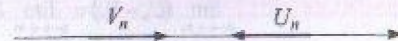
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 3\ell + 8\ell = 11\ell$$

لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 99$ إذن $11\ell = 99$ و منه $\ell = 9$

2-5 تعريف

القول أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان يعني أن إحدهما متناقصة و الأخرى متزايدة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \text{ و}$$



مثال -

$$U_n = 2 - \frac{1}{n+1} \text{ و } V_n = 2 + \frac{1}{n+1}$$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0 \text{ و}$$

مبرهنة

إذا كانت المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتين فإن كليهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

الإثبات

لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

نبرهن أولاً أن $V_n \geq U_n$

- لتكن المتتالية (W_n) العرفية بـ $W_n = V_n - U_n$

- ندرس اتجاه تغير (W_n)

$$W_{n+1} - W_n = (V_{n+1} - U_{n+1}) - (V_n - U_n) = (V_{n+1} - V_n) - (U_{n+1} - U_n)$$

بما أن (U_n) متزايدة فإن $U_{n+1} - U_n \geq 0$

وبما أن (V_n) متناقصة فإن $V_{n+1} - V_n \leq 0$

و منه نستنتج أن للمتتالية (W_n) متناقصة و تقرب من الصفر.

لنبرهن بالخلف أن كل حدودها موجبة.

نفرض أن أحد حدودها W_p سالب تماماً و لتكن قيمته $-a$ حيث $a > 0$.

المتتالية (W_n) متناقصة إذن كل حدودها ابتداء من W_p تكون أصغر من a -
وبالتالي المجال $[a, -a]$ لا يشمل كل حدود (W_n) ابتداء من رتبة معينة و عليه المتتالية (W_n) لا تتوّل إلى الصفر وهذا يناقض الفرضية.

إذن كل حدود (W_n) موجبة.

ومنه نستنتج أن $V_n - U_n \geq 0$ أي $V_n \geq U_n$ من أجل كل n .

- نبين أن (U_n) و (V_n) متقاربتان

نعلم أن $V_n \geq U_n$ ولكن (V_n) متناقصة و كل حدودها أصغر من V_0 و عليه من أجل كل n $V_0 > V_n \geq U_n$ مما يفسر أن (U_n) محدودة من الأعلى.

المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة و لتكن ℓ نهايتها.

وبنفس الطريقة نبين أن (V_n) محدودة من الأسفل بـ U_0 و متناقصة

فهي إذن متقاربة نحو ℓ .

- نبين أن $\ell = \ell$:

نعلم أن (U_n) و (V_n) تقتربان على التوالي إلى ℓ و ℓ و حسب القواعد العملية للنهايات نجد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell - \ell$$

$$\text{وبما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \text{ فإن } \ell - \ell = 0 \text{ أي } \ell = \ell$$

خاصية

كل عدد حقيقي يمكننا حصره بواسطة حدود متتابعة لمتالتين (a_n) و (b_n)

بحيث المتتالية (a_n) متزايدة و المتتالية (b_n) متناقصة و $b_n - a_n = 10^{-n}$

هذا العدد الحقيقي هو النهاية المشتركة للمتالتين المتقاربتين للأعداد العشرية.

الإثبات

ليكن x عدد حقيقي بحيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $a_n < x < b_n$

$$\text{و } b_n - a_n = 10^{-n}$$

إذا كانت (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^{-n} = 0$

فإن المتالتين (a_n) و (b_n) متجاورتان و بالتالي تقتربان إلى نفس النهاية ℓ

و بتطبيق نظرية الحصر نجد أن المتالتين تقتربان نحو x .

مثال -

تعطي الآلة الحاسبة $\sqrt{2} = 1.41421356$ و منه يمكننا كتابة الحصر التالي:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \text{ إذن } a_0 = 1.41 \text{ و } b_0 = 1.42 \text{ مع } b_0 - a_0 = 10^{-2} = 0.01$$

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \text{ إذن } a_1 = 1.4 \text{ و } b_1 = 1.5 \text{ و } b_1 - a_1 = 0.1 = 10^{-1}$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \text{ إذن } a_2 = 1.41 \text{ و } b_2 = 1.42 \text{ و } b_2 - a_2 = 0.01 = 10^{-2}$$

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415 \text{ إذن } a_3 = 1.414 \text{ و } b_3 = 1.415 \text{ و } b_3 - a_3 = 0.001 = 10^{-3}$$

المتتالية $1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ متزايدة.

المتتالية $2, 1.5, 1.42, 1.415, \dots$ متناقصة.

هاتان المتالتان لهما نهاية مشتركة $\sqrt{2}$.

تمرين تدريبي 1

لتكن (U_n) و (V_n) متتالتان معرفتان كما يلي:

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}, \quad V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}, \quad V_0 = 3, \quad U_0 = 2$$

(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_n - U_n > 0$

(2) بين أن المتتالية (W_n) العرقة بـ $W_n = V_n - U_n$ هي متتالية هندسية.

(3) بين أن المتالتين (U_n) و (V_n) متقاربتان.

(4) احسب $U_{n+1} + V_{n+1}$ بدلالة $U_n + V_n$ ثم ماذا يمكن القول عن المتتالية (X_n)

العرقة بـ $X_n = U_n + V_n$ ثم استنتج النهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) .

✓ الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $V_n - U_n > 0$ "

- صحيحة لأن $V_0 - U_0 = 3 - 2 = 1 > 0$ و p_0

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $V_n - U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} > 0$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(2U_n + 3V_n) - (3U_n + 2V_n)}{5} = \frac{1}{5} (V_n - U_n)$$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} > 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(2) (W_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $W_{n+1} = q W_n$

$$\text{إذن } W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{5} (V_n - U_n) = \frac{1}{5} W_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2V_n}{5} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{5} = \frac{2}{5} W_n$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2U_n - 2V_n}{5} = -\frac{2}{5} W_n$$

$$\text{بما أن } W_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n > 0 \text{ فإن } U_{n+1} - U_n > 0 \text{ و } V_{n+1} - V_n < 0$$

مما يدل على أن (U_n) متزايدة و أن (V_n) متناقصة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0 \text{ فإن } W_n = V_n - U_n \text{ و بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

إذن (U_n) و (V_n) متتالتان متجاورتان و بالتالي فهما متقاربتان.

$$U_{n+1} + V_{n+1} = \frac{5U_n + 5V_n}{5} = U_n + V_n \quad (4)$$

إذن التتالية (X_n) ثابتة و عليه فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = U_0 + V_0 = 5$

و من جهة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell + \ell = 2\ell$

$$\text{إذن } 2\ell = 5 \text{ منه } \ell = \frac{5}{2}$$

6 - حصر مقادير باستعمال المتتاليات المتجاورة

لتحديد مقدار مجهول S (مساحة، طول، حجم، عدد ...) يتحتم علينا إيجاد حصر أكثر فأكثر دقة لـ S بمقادير معلومة.

في المرحلة الأولى نحصل على $V_0 < S < U_0$

و في المرحلة الثانية $V_0 < V_1 < S < U_1 < U_0$

و في المرحلة n نحصل على $V_0 < V_1 < \dots < V_n < S < U_n < \dots < U_1 < U_0$

نعيد هذه العملية بعدد غير منته من المرات، فنحصل على متتالية (V_n) متزايدة و التتالية (U_n) متناقصة.

و متتالية الفرق $U_n - V_n$ تقترب نحو الصفر.

المجالات $[V_0, U_0], [V_1, U_1], \dots, [V_n, U_n], \dots$ أطوالها تقترب من الصفر،

مما يجعل المجال $[V_n, U_n]$ حصرًا دقيقًا لـ S .

تمرين تدريبي 1

نريد حساب قيمة مقربة للمساحة A للحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) المثل

للدالة $\frac{1}{x}$ و المستقيمات التي معادلاتها هي $x=1$ و $x=2$ و $y=0$.

D هو مجموعة النقاط $M(x, y)$ من المستوى النسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

(وحدة الطول اسم) بحيث $2 \geq x \geq 1$ و $f(x) \geq y \geq 0$.

على محور الفواصل نعلم النقطتين A و B فاصلتيهما على التوالي 1 و 2

و ليكن n عدد طبيعي معطى حيث $n \geq 2$.

نقسم القطعة $[AB]$ إلى n قطع متقاربة و على كل قطعة نرسم مستطيلين

أحد رأسيهما العلويين ينتهي إلى (C_f) .

و هكذا نحصل على n مستطيل سفلي يقع تحت C_f و n مستطيل علوي كما

هو موضح في الشكل. نرمز بـ s_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات السفلية

و S_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات العلوية نحصل هكذا على متتاليتين

عدديتين s_n و S_n اللتان تحصران المساحة A . أي $s_n < A < S_n$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون

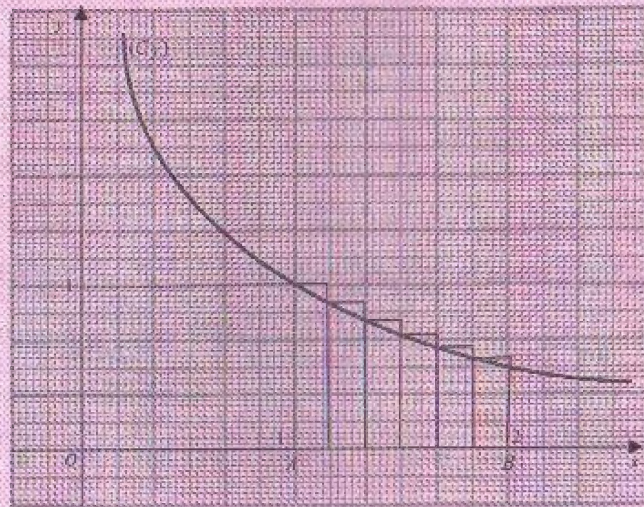
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \text{ و } s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(2) بين أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة.

(3) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$ ماذا تستنتج؟

(4) عين أصغر عدد طبيعي p حيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} و عدد q

بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} .



✓ الحل

(1) مساحة المستطيل السفلي الأول هي:

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ و تساوي } \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

مساحة المستطيل السفلي الثاني هي:

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \text{ و تساوي } \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

و هكذا حتى نصل إلى المستطيل السفلي الأخير الذي مساحته $\frac{1}{n} \times f(2)$ و تساوي $\frac{1}{2n}$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات السفلية هي $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- مساحة المستطيل العلوي الأول هي :

$$\frac{1}{n} \times f(1) \text{ و تساوي } \frac{1}{n}$$

مساحة المستطيل العلوي الثاني هي :

$$\frac{1}{n} \times f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{n+1}$$

مساحة المستطيل العلوي الأخير هي :

$$\frac{1}{n} \times f\left(2 - \frac{1}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{2n-1}$$

إذن الساحة الكلية للمستطيلات العلوية هي :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

(2) إثبات أن (S_n) متناقصة.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n+1+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

- إثبات أن (S_n) متزايدة.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)(n+1)} \end{aligned}$$

$S_n > 0$ ومنه فإن (S_n) متزايدة.

(3) بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_n) = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ و $S_n - S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$
 بما أن (S_n) متزايدة و (S_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_n) = 0$ فإن (S_n) و (S_n) متتاليتان متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية ℓ و حسب نظرية الحصر فإن $A = \ell$

(4) تعيين p بحيث S_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} .

$$S_p \text{ قيمة مقربة لـ } A \text{ إلى } 10^{-2} \text{ هذا معناه أن } (1) \dots (10^{-2}) |S_p - A|$$

$$\text{و بما أن } (S_n) \text{ متزايدة تماما فإن } |S_{p+1} - A| < |S_p - A|$$

$$\text{ولدينا } |S_{p+1} - S_p| = |(S_{p+1} - A) - (S_p - A)|$$

$$\text{لكن } |(S_{p+1} - A) - (S_p - A)| \leq |S_{p+1} - A| + |S_p - A|$$

$$|S_{p+1} - S_p| \leq |(S_{p+1} - A)| + |(S_p - A)| < (10^{-2} + 10^{-2})$$

$$\text{ومنه نجد } |S_{p+1} - S_p| < (2 \times 10^{-2})$$

$$|S_{p+1} - S_p| < (2 \times 10^{-2}) \text{ يكافئ } \frac{1}{2(p+1)(2p+1)} < \frac{2}{10} \text{ يكافئ } p \in]2.79, +\infty[$$

وبما أن p عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 فإن أصغر قيمة ممكنة لـ p هي 3.
 و في هذه الحالة تكون القيمة القريبة بالنقصان لـ A إلى 10^{-2} هي $S_3 \approx 0.61$

- تعيين q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}

$$\text{بنفس الطريقة نجد } |S_{q+1} - S_q| < (2 \times 10^{-2})$$

$$\text{و منه نجد } \frac{1}{2q(2q+1)} < \frac{2}{10} \text{ وبالتبسيط نجد } 2q^2 + q - 25 > 0$$

$$\text{و عليه } p \in]3.29, +\infty[$$

إذن أصغر قيمة لـ q هي $q = 4$

إذن S_4 هي قيمة مقربة بالزيادة لـ A إلى 10^{-2}

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \approx 0.75 \text{ إذن } 0.61 < A < 0.75$$

العدد A هو عدد شهير و هو اللوغاريتم النعري لـ 2.



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

مجموعة نهاية المتتاليات

- (1) المتتالية (U_n) معرفة من أجل كل $n \geq 2$ بـ $U_n = \frac{2n+1}{n-1}$ نهايتها 2. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$
- (2) المتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2 \sqrt{n}$ نهايتها $(+\infty)$. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن V_n تنتمي إلى المجال $]10^5 ; +\infty[$

الحل

(1) الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$ يعني أن $2,02 > \frac{2n+1}{n-1} > 1,98$

وبطرح (2) من حدود هذه الأخيرة نجد $-0,02 > \frac{3}{n-1}$

وبالضرب في $10^2(n-1)$ نجد $2(n-1) > 3 > 2(n-1)$ (I)

الثانية $2(n-1) > 3$ دوما محققة ومنه المتباينة (I) تكافئ $2(n-1) > 3$

$2(n-1) > 3$ تكافئ $2n > 5$ تكافئ $n > \frac{5}{2}$ ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 3.

(2) الحدود V_n تنتمي إلى $]10^5 ; +\infty[$ هذا يعني $n^2 \sqrt{n} > 10^5$ أي $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$

$n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ يكافئ $(\sqrt{n})^5 > 10^5$ يكافئ $\sqrt{n} > 10$ يكافئ $n > 100$

ومنه قيمة n المطلوبة هي 101.

تطبيق 2

مجموعة حصر متتالية - نهاية متتالية باستعمال نظرية الحصر

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $U_n = (\frac{n}{10}-1)^n$

(1) احسب U_1, U_2, U_3, U_4

(2) بين أنه إذا كان $n > 25$ فإن $(\frac{3}{2})^n > U_n$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

الحل

$$u_2 = (\frac{2}{10}-1)^2 = \frac{64}{100}, u_1 = (\frac{1}{10}-1)^1 = \frac{-9}{10} \quad (1)$$

$$u_4 = \frac{81}{625}, u_3 = (\frac{3}{10}-1)^3 = \frac{-343}{1000}$$

(2) إذا كان $n > 25$ فإن $\frac{n}{10}-1 > \frac{3}{2}$ ومنه $(\frac{n}{10}-1)^n > (\frac{3}{2})^n$

لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{2})^n = +\infty$ حد عام لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2} > 1$ و

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

تطبيق 3

مجموعة نهاية متتالية

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) محددا القاعدة المستعملة

$$U_n = \frac{3n^2+5n+1}{n^2+n+1} \quad (أ) \quad U_n = 3n - \frac{1}{3n+2} \quad (ب) \quad U_n = \frac{5n+2}{3n-2} \quad (ج)$$

$$U_n = \cos(\frac{n\pi+1}{2n+1}) \quad (د) \quad U_n = \sqrt{\frac{3n-1}{n+1}} \quad (هـ)$$

$$U_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+1} \quad (و) \quad U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

الحل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+2}{3n-2} = \frac{5}{3} \quad (أ) \quad \text{(نهاية دالة ناطقة)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3n+2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty \quad (ب) \quad \text{(قاعدة مجموع متتاليتين)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3 \quad (ج) \quad \text{(نهاية دالة ناطقة)}$$

$$U_n = f(V_n) \quad \text{حيث} \quad V_n = \frac{3n-1}{n+1} \quad \text{و} \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (د)$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 3$ و f مستمرة عند 3

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(3) = \sqrt{3}$ من الشكل $(U_n = f(V_n))$

(هـ) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ و $f(x) = \cos x$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$ والبال f مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

(و) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2+3n+2}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(\sqrt{n^2+3n+2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = 0$

(ي) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{0}{1} = 0$

المتتاليات و المتتاليات

اذا $U_{n+1} > 0$ بالتالي p_{n+1} صحيحة و عليه p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .

(1) $V_{n+1} = V_n + q$ يعني (V_n) حسابية اساسها q

$V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3}{\frac{U_n}{1+U_n}} = 3 \frac{(1+U_n)}{U_n} = \frac{3}{U_n} + 3 = V_n + 3$

اذا (V_n) حسابية اساسها $q=3$ وحدها الاول $V_0 = \frac{3}{U_0} = \frac{3}{2}$

(ب) بما أن (V_n) حسابية حدها الاول V_0 اساسها q

فإن عبارة الحد العام هي $V_n = V_0 + qn$ إذن $V_n = \frac{3}{2} + 3n$

لدينا $V_n = \frac{3}{U_n}$ و منه $U_n = \frac{3}{V_n}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{3}{\frac{3}{2} + 3n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{3}{2} + 3n} = 0$

المتتاليات المحدودة

تطبيق 5

(1) (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معلوم

ب $U_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

(2) (V_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب $V_n = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$

بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $1 \leq V_n \leq 3$.

الحل

(1) من اجل كل عدد طبيعي غير معلوم n لدينا $n^2 \geq 1$

بالقلب نجد $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$ بالضرب في -3 نجد $-\frac{3}{n^2} < 0$

وبإضافة 2 نجد $2 - \frac{3}{n^2} < 2$ أي $-1 < 2 - \frac{3}{n^2}$

إذن المتتالية (U_n) محدودة لأنها محدودة من الأعلى و من الأسفل.

(2) $V_n = \frac{(n^2+n+1)+(2n+2)}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} + \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} = 1 + 2 \frac{n+1}{n^2+n+1}$

تطبيق 4 حساب نهاية متتالية بالاعتماد على متتالية حسابية

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي n ب $U_0 = 2$

و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ و $V_n = \frac{3}{U_n}$

(1) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(2) بين أن المتتالية (V_n) حسابية (ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n

(3) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $U_n > 0$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من اجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$.

بما أننا فرضنا $U_n > 0$ فإن $1+U_n > 0$ ومنه $\frac{U_n}{1+U_n} > 0$

تطبيق 6

بما أن $2\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) > 0$ فإن $1 + 2\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) \geq 1$ أي $V_n \geq 1$

وبما أن $n^2+n+1 \geq n+1$ فإن $\frac{n+1}{n^2+n+1} \leq 1$

وبضرب طرفي هذه المتباينة في 2 نجد $2\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) \leq 2$ بإضافة 1 نجد $V_n \leq 3$

إذن $1 \leq V_n \leq 3$

تطبيق 7 حصر متتالية بمتالتين

من أجل كل متتالية (U_n) من للتتالية الآتية أوجد متالتين (V_n) و (W_n) مختلفتين عن (U_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$.

$$(1) \quad U_n = \frac{n+3}{n+2}$$

$$(ب) \quad U_n = \frac{5n^2-4n+7}{n-1} \quad \text{مع } n \geq 2$$

$$(ج) \quad U_n = \sqrt{3+n}$$

$$(د) \quad U_n = \frac{1}{\sqrt{3+n}}$$

الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ (1)

(2) $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}$ بالقلب نجد $n+3 \geq n+2 \geq n+1$

بضرب حلود (1) و (2) طرفاً لطرف نجد $\frac{n+4}{n+1} \geq U_n \geq \frac{n+2}{n+3}$

ومنه $V_n = \frac{n+2}{n+3}$ و $W_n = \frac{n+4}{n+1}$

(ب) من أجل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $U_n = n-3 + \frac{4}{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $n-1 \geq 1$ ومنه $0 < \frac{1}{n-1} \leq 1$

بالضرب في 4 نجد $0 < \frac{4}{n-1} \leq 4$

وبإضافة $n-3$ نجد $n-3 + 0 \leq n-3 + \frac{4}{n-1} \leq n-3 + 4$

أي $n-3 \leq U_n \leq n+1$ إذن $W_n = n+1$ و $V_n = n-3$

(ج) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ بالجدد نجد :

$$W_n \geq U_n \geq V_n \quad \text{أي} \quad \sqrt{n+4} \geq \sqrt{n+3} \geq \sqrt{n+2}$$

$$\text{حيث } W_n = \sqrt{n+4} \quad \text{و} \quad V_n = \sqrt{n+2}$$

(د) بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

$$\text{أي } V_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}} \quad \text{و} \quad W_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \quad \text{حيث } V_n \leq U_n \leq W_n$$

تطبيق 7

حساب نهاية متتالية باستعمال الحصر

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 < U_n \leq \sqrt{2}$

(2) بين أنه إذا كانت $n > 10^4$ فإن $U_n < 10^{-2}$

(ب) بين أنه إذا كانت $n > 10^8$ فإن $U_n < 10^{-4}$

(ج) كيف نختار n بحيث $U_n < 10^{-8}$ ؟ ما هي نهاية (U_n) ؟

الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+2 > n$ بجذر الطرفين نجد $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ بالتالي :

$$U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} > 0$$

$$U_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \quad \text{تكتب على الشكل}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{2}$ و $\sqrt{n} \geq 0$ ومنه

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n} \geq \sqrt{2} \quad \text{بالقلب نجد} \quad \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \sqrt{2} \quad \text{أي} \quad U_n \leq \sqrt{2} \quad \text{إذن} \quad 0 < U_n \leq \sqrt{2}$$

(2) إذا كان $n > 10^4$ فإن $\sqrt{10^4} \geq \sqrt{10^4+2} > \sqrt{n+2}$ و $\sqrt{n} > 10^2$

$$\text{وبالتالي يكون} \quad \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2 \times 10^2} \quad \text{بالقلب نجد}$$

$$U_n < 10^{-2} \quad \text{نجد في 2}$$

(ب) إذا كان $n > 10^8$ فإن $\sqrt{n+2} > 10^4$ و $\sqrt{n} > 10^4$ وبالتالي يكون :

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2 \times 10^4} \quad \text{بالقلب نجد} \quad U_n < 10^{-4} \quad \text{إذن}$$

ج. من السؤال (1) و (ب) نستنتج أنه يمكن اختبار n بحيث $10^{16} > n$ يحقق $U_n < 10^{-8}$.
- نلاحظ أنه كلما كبر n فإن المجال الذي تنتمي إليه الحدود U_n يصغر و يقترب نحو الصفر. ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

تطبيق 8

دراسة تقارب متتاليات - البرهان بالتراجع

(1) U_n متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2}$.
(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $U_n = \sqrt{1+n}$.
(ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n) .
(2) نضع $V_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ و $W_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ادرس تقارب هاتين المتتاليتين.

الحل

(1) (أ) نسمي p_n الخاصية " $U_n = \sqrt{1+n}$ ".
 p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1 = \sqrt{1+0}$.
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n = \sqrt{1+n}$.
ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} = \sqrt{2+n}$.
 $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2} = \sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2} = \sqrt{2+n}$.
منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+n} = +\infty$ منه (U_n) متتالية متباعدة.
(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$.
بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{1} = 1$ إذن المتتالية (V_n) متقاربة.
- $W_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين.
نكتب $W_n = \frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}} \right) = 1+1=2$ إذن المتتالية (W_n) متقاربة.

تطبيق 9

دراسة تقارب متتالية و حساب نهايتها

(1) U_n متتالية حدودها موجبة معرفة بـ $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $n^2 U_n^2 - (n-1)^2 U_{n-1}^2 = n$.
(2) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2 U_n^2$.
(أ) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} - V_n = n+1$.
(ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n .
(2) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة يطلب إيجاد نهايتها.

الحل

(1) (أ) من المساواة (1) نجد $V_n - V_{n-1} = n$.
بإستبدال n بـ $n+1$ نحصل على $V_{n+1} - V_n = n+1$.
(ب) من العلاقة $V_{n+1} - V_n = n+1$ نجد:
 $V_2 - V_1 = 2$
 $V_3 - V_2 = 3$
 $V_4 - V_3 = 4$
 \vdots
 $V_{n-1} - V_{n-2} = n-1$
 $V_n - V_{n-1} = n$

بجمع أطراف المساويات طرفاً إلى طرف نجد $V_n - V_1 = 2+3+\dots+n$.
ومنه $V_n = 1+2+3+\dots+n$ وبما أن $V_1 = 1$ فإن $V_n = 1+2+3+\dots+n$.
 V_n مجموع n حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1.
ومنه $V_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $U_n^2 = \frac{V_n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$ ومنه $U_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$.
بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{\frac{1}{2}}$ وبالتالي المتتالية (U_n) متقاربة.

تطبيق 10

اتجاه تغير متتالية - تقارب متتالية

$U_0 = 5$
 $U_{n+1} = 3 + \frac{U_n}{2}$ متتالية معرفة بـ

(أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > \frac{9}{2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير (U_n)

(ج) استنتج أن (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

✓ الحل

(أ) نسمي p_n الخاصية " $U_n > \frac{9}{2}$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 5 > \frac{9}{2}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي أي $U_n > \frac{9}{2}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

لدينا فرضاً $U_n > \frac{9}{2}$ بالضرب في $\frac{1}{3}$ نجد $\frac{U_n}{3} > \frac{3}{2}$

وبإضافة 3 نجد $3 + \frac{U_n}{3} > \frac{9}{2}$ أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2})$

بما أن $U_n > \frac{9}{2}$ فإن $U_n - \frac{9}{2} > 0$ أي $-\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2}) < 0$ مما يدل أن (U_n) متناقصة.

(ج) بما أن (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو

جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = 3 + \frac{x}{3}$

$x = 3 + \frac{x}{3}$ يكافئ $\frac{2}{3}x = 3$ يكافئ $x = \frac{9}{2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell = \frac{9}{2}$ مقبول وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{9}{2}$

دراسة المتتالية المحدودة

تطبيق 11

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

(2) (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = -1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى؟ من الأسفل؟ محدودة؟

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n+1 \geq 1$ و منه $\sqrt{n+1} \geq 1$

بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

(2) $|U_n + 1| = \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}} \right|$ منه $U_n + 1 = \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

بما أن $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ و $0 \leq |\sin n| \leq 1$ فإن $0 < \frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ أي $|U_n + 1| \leq 1$

هذا معناه أن $-1 \leq U_n + 1 \leq 1$ أي $-2 \leq U_n \leq 0$ (ذن المتتالية (U_n) محدودة).

دراسة تقارب متتالية

تطبيق 12

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

(2) احسب $U_{2n} - U_n$ (ب) استنتج أن $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

(3) بفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{2n} \geq \frac{n}{2}$

هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

✓ الحل

(1) $U_{n+1} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة

(2) $U_{2n} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$
 $= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

(ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \leq n+2 \leq n+3 \leq n+4 \leq \dots \leq 2n$

بالقلب نجد $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3} \geq \dots \geq \frac{1}{2n}$

$$U_{2n} - U_n \geq n \times \frac{1}{2^n} \text{ أي } U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$$

(3) بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = +\infty$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة (حسب نظرية الحصر).

تطبيق 15

مبرهن البرهان بالتراجع - دراسة تقارب متتالية

$$(1) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

(2) استنتج أن المتتالية (U_n) المعرفة بـ:

$$U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

محدودة من الأعلى ومتقاربة.

✓ الحل

$$(1) \text{ نسمي } p_n \text{ الخاصية " } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ "}$$

$$p_1 \text{ صحيحة لأن } \frac{1}{1!} = 1 \text{ و } \frac{1}{2^{1-1}} = 1 \text{ و } 1 \leq 1$$

$$\text{- نفرض أن } p_n \text{ صحيحة من أجل عدد طبيعي } n \text{ غير معلوم أي } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{ونبرهن أن } p_{n+1} \text{ صحيحة أي } \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{بضرب طرفي المتباينة } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ في } \frac{1}{n+1} \text{ نجد } \frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

$$\text{أي } \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \text{ (1)}$$

$$\text{وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{فإن } \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n} \text{ (2)}$$

$$\text{من (1) و (2) نجد } \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

إذن p_{n+1} صحيحة بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

$$(2) \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$$

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ أي } \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2} \text{ مجموع } n \text{ حد من حدود متتالية هندسية حدها 1 وأساسها } \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه } \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{إذن } U_n \leq 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\text{لدينا } \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0 \text{ ومنه } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

$$\text{بالضرب في 2 نجد } 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq 2 \text{ إذن } U_n \leq 2$$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى.

$$\text{- من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معلوم } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما وبما أنها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تطبيق 16

مبرهن المتتالية الدورية

(U_n) متتالية دورية إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معلوم p بحيث من

$$U_{n+p} = U_n \text{ يكون } n \text{ كل عدد طبيعي}$$

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n + U_{n+1} = 5 \end{cases} \text{ لتكن المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة بـ}$$

بين أن (U_n) دورية. هل (U_n) رتيبة ؟

✓ الحل

$$U_{n+p} = 5 - U_{n+p-1} = 5 - (5 - U_{n+p-2}) = U_{n+p-2}$$

$$\text{بما أن } U_{n+p-2} = U_n \text{ و } U_{n+p} = U_n$$

فإنه ينتج من أجل كل n لدينا $n+p-2 = n$ أي $p=2$

و بالتالي (U_n) دورية دورها 2 .

$$U_{n+1} - U_n = 5 - 2U_n$$

إذا كان n زوجي فإن $5 - 2U_n > 0$ و بالتالي $U_{n+1} - U_n > 0$
و إذا كان n فردي فإن $5 - 2U_n < 0$ و بالتالي $U_{n+1} - U_n < 0$
إذن إشارة $U_{n+1} - U_n$ ليست ثابتة و بالتالي (U_n) ليست رتيبة.

تطبيق 15

تعيين نهاية متتالية بطريقتين مختلفتين

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 0 \text{ و } U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي موجب تاماً $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$
(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج تقاربها.

(2) بين أنه من أجل كل $x \in [0, \pi]$ يكون $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$

(ب) بين عندئذ أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$
و استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

✓ الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$ "

- p_1 صحيحة لأن $U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n غير معلوم أي $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$.

لدينا $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$ بإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leq U_n + 1 \leq 2$

بالجذر نجد $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \leq \sqrt{U_n + 1} \leq \sqrt{2}$ بالضرب في $\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لأن } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \leq U_{n+1} \leq 1$$

إذن p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} - U_n = \frac{\frac{1}{2}(1+U_n) - U_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} + U_n} = \frac{(U_n-1)(-2U_n-1)}{2(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} + U_n)} \quad (\text{ب})$$

بما أن $0 \leq U_n \leq 1$ فإن $-2U_n - 1 \leq 0$ و $U_n - 1 \leq 0$ ومنه

$(U_n-1)(-2U_n-1) > 0$ بالتالي $U_{n+1} - U_n > 0$ أي (U_n) متزايدة

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ الذي هو

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x} \text{ يكافئ } 2x^2 - x - 1 = 0 \text{ يكافئ } (x=1) \text{ أو } (x=-\frac{1}{2})$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

(2) لدينا من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \text{ و } \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

منه ينتج $\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$ إذن $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$

بما أن $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فإن $\cos \frac{x}{2} > 0$ ومنه $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$

(ب) نسمي p_n الخاصية " $U_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right)$

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} = \sqrt{\frac{1+\cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)}{2}} = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = 1$$

تطبيق 16

مجموع المقارنة و النهاية

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

(1) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

(2) استنتج تقارب التتالية (U_n) ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

(1) مجموع n حدا اصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ و أكبرها $\frac{n}{n^2+1}$

وعليه يكون $\frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$

ومنه نجد $n(\frac{n}{n^2+n}) \leq U_n \leq n(\frac{n}{n^2+1})$ أي $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

لأن $n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$

(2) بما أن $W_n \leq U_n \leq V_n$ حيث $W_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ و $V_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ و (W_n) متقاربتان

ولهما نفس النهاية فإن التتالية (U_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1$

مجموع النهايات والخصر

تطبيق 17

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 4$
 $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{9}{U_n})$

(1) برهن بالتراجع أن التتالية (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3

(2) ادرس اتجاه تغير (U_n)

(3) بين بالتراجع أن $U_n \leq \frac{1}{2} + 3$ ثم استنتج نهاية (U_n)

✓ الحل

(1) محدودة من الأسفل بـ 3 هذا معناه أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq 3$

نسمي p_n الخاصية " $U_n \geq 3$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $4 \geq 3$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أي $U_n \geq 3$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \geq 3$

الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{9}{x})$ متزايدة تماما على $[3, +\infty[$

لأن $f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{x^2-9}{x^2})$ و $f''(x) > 0$ من أجل كل $x \geq 3$

بما أن f متزايدة تماما على $[3, +\infty[$ و $U_n \geq 3$

فإن $f(U_n) \geq f(3)$ أي $U_{n+1} \geq f(3)$

لكن $f(3) = 3$ إذن $U_{n+1} \geq 3$ وهذا يعني أن p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + \frac{9}{U_n}) - U_n = -\frac{1}{2}(U_n - \frac{9}{U_n}) \quad (2)$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}(\frac{U_n^2 - 9}{U_n}) = -\frac{1}{2} \frac{(U_n - 3)(U_n + 3)}{U_n}$$

بما أن $U_n \geq 3$ فإن $(U_n - 3) \geq 0$ و $(U_n + 3) > 0$

$$\text{ومنه } \frac{1}{2} \frac{(U_n - 3)(U_n + 3)}{U_n} \leq 0$$

أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وهذا يعني (U_n) متناقصة.

(3) نسمي p_n الخاصية " $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $3 + \frac{1}{2^0} = 4$ و $4 \leq 4$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$

لدينا $U_n \geq 3$ منه ينتج $\frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2}$ (1)

من الفرض (2) ينتج $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$

بجمع طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{1}{2}U_n + \frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$

أي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{2^n}\right) = 3$ و $3 \leq U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$

تطبيق 18

لنجد المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $2U_{n+1} = U_n - 1$

(1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

(2) α عدد حقيقي و (V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n = U_n - \alpha$

(أ) عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية

(ب) اكتب U_n و V_n بدلالة n ثم ادرس تقارب المتتالية (U_n)

(ج) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}]$

الحل

(1) من المعطيات نجد $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2}$

$$U_5 = -\frac{15}{16}, U_4 = -\frac{7}{8}, U_3 = -\frac{3}{4}, U_2 = -\frac{1}{2}, U_1 = 0$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} (V_n + \alpha) - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} V_n - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \quad (2)$$

حتى تكون (V_n) هندسية يجب أن يكون $-\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} = 0$ أي $\alpha = -1$

$$(ب) \quad V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad V_0 = U_0 + 1 = 2 \quad \text{إذن} \quad V_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad U_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$ ومنه (U_n) متقاربة نحو -1

$$(ج) \quad U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}] \quad \text{هذا معناه أن} \quad -1-10^{-4} < 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 < -1+10^{-4}$$

$$\text{أي} \quad -10^{-4} < 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 < -1+10^{-4} \quad \text{وبإضافة 1 نجد} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1+10^{-4}$$

$$\text{التي تعطينا} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1+10^{-4} \quad \text{دوماً محققة يبقى لنا فقط إيجاد} \quad n \quad \text{بحيث} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 10^{-4}$$

$$\text{بما أن} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{فإن} \quad n-1 \geq 4 \quad \text{أي} \quad n \geq 5$$

ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 5.

تمارين التمارين والتمارين

تطبيق 19

نضع في بنك مبلغ قدره 25000 DA في أول جانفي 2008 بفائدة قدرها 5% لكل سنة ونسحب في نهاية كل سنة 2500 DA.

إذا كانت U_n القيمة بالدينار للمبلغ المتبقي في البنك في السنة n (أي السنة $2008+n$)

(1) أوجد علاقة تربط بين U_n و U_{n+1}

(2) بين أن المتتالية (V_n) العرفية بـ $V_n = U_n - 50000$ هندسية بطلب تعيين أساسها

(3) ما هي السنة التي يتفد فيها رصيده من البنك؟

الحل

(1) إذا كان U_n هو المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n)$ و U_{n+1} المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n+1)$ فإن

$$U_{n+1} = U_n + 5\% \times U_n - 2500$$

$$\text{ومن هنا نجد} \quad U_{n+1} = 1.05 U_n - 2500$$

$$(2) \quad V_{n+1} = U_{n+1} - 50000 = 1.05 U_n - 2500 - 50000$$

$$= 1.05 (V_n + 50000) - 52500$$

$$= 1.05 V_n + 1.05 \times 50000 - 52500 = 1.05 V_n$$

إذن (V_n) هندسية أساسها $q = 1.05$

$$V_0 = U_0 - 50000 = -25000 \quad \text{مع} \quad V_n = V_0 q^n$$

$$\text{ومن هنا} \quad V_n = -25000 (1.05)^n$$

$$\text{بما أن} \quad U_n = V_n + 50000 \quad \text{فإن} \quad U_n = -25000 (1.05)^n + 50000$$

$$(3) \quad \text{يتفد رصيده من البنك هنا معناه} \quad U_n = 0 \quad \text{أي} \quad (1.05)^n = 2$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة نجد} \quad n \approx 14.25$$

ومن هنا السنة التي يتفد فيها رصيده من البنك هي $2008+15$ أي 2023.

تطبيق 20

لنجد المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$

(1) بين بالتراجع أن $U_n \geq 0$

(2) بين أن المتتالية (U_n) رتيبة.

(3) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

(4) اكتب V_n و U_n بدلالة n معينا نهاية (U_n)

(5) اوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n > 0,99$.

✓ الحل

(1) يمكن كتابة $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2}$

نسمي الخاصية " $U_n \geq 0$ " (1)

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 0$ و $0 \geq 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $U_n \geq 0$

ونفرض أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \geq 0$

لدينا $U_n \geq 0$ (1) منه ينتج $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{U_n + 2} \geq \frac{1}{2}$

بالضرب في (-3) نجد $-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{U_n + 2} \leq -1$

وبإضافة 2 نجد $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2} \geq 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - U_n = \frac{-U_n^2 + 1}{U_n + 2} = -\frac{(U_n - 1)(U_n + 1)}{U_n + 2} \quad (2)$$

بما أن $U_n \geq 0$ (1) فإن $-(U_n - 1) \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \geq 0$ أي $U_{n+1} \geq U_n$ متزايدة.

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} + 1} = \frac{U_n - 1}{3U_n + 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{U_n - 1}{U_n + 1} \right) = \frac{1}{3} V_n \quad (3)$$

منه (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = -1$

$$(4) \text{ لدينا } V_n = V_0 q^n \text{ إذن } V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$U_n = \frac{V_n + 1}{1 - V_n} \text{ يكافئ } V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$$

$$\text{إذن } U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$(5) \text{ } U_n > 0,99 \text{ يكافئ } \frac{0,01}{199} > \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ يكافئ } \frac{1}{3^4} > \frac{1}{199}$$

و منه نجد $n > 4$ و عليه أصغر قيمة لـ n هي 5.

تطبيق (2)

متتاليتان متجاورتان

a و b عدنان حقيقيان بحيث $0 < a < b$

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}

$$U_0 = a \text{ و } V_0 = b \text{ و } U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \text{ و } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

(1) بين أنه من أجل كل n تكون (U_n) و (V_n) موجبتين تماما.

(2) بين أنه من أجل كل n يكون $U_n \leq V_n$

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$$

(ب) استنتج أن $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

(4) بين أن للتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

(ب) إذا كانت $a = 2$ و $b = 5$ استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة

التقريبية للنهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) بتقريب 10^{-3} .

✓ الحل

(1) بين أنه من أجل كل n لدينا $U_n > 0$ و $V_n > 0$

نسمي الخاصية " $U_n > 0$ و $V_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $V_0 = b$ و $U_0 = a$ و $a > 0$ و $b > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n يكفي أي $U_n > 0$ و $V_n > 0$

ونفرض أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$ و $V_{n+1} > 0$

$$\text{بما أن } U_n > 0 \text{ و } V_n > 0 \text{ فإن } \frac{U_n + V_n}{2} > 0$$

أي $V_{n+1} > 0$

بما أن $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $U_n V_n > 0$

وبالتالي $\sqrt{U_n V_n} > 0$ أي $U_{n+1} > 0$

ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n .

(2) الخاصية p_n " $U_n < V_n$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a < b$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n < V_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} < V_{n+1}$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} - \frac{U_n + V_n}{2}$$

$$= \frac{U_n V_n - \left(\frac{U_n + V_n}{2}\right)^2}{\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{4\left(\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}\right)}$$

بما أن $-(U_n - V_n)^2 < 0$ فإن $U_{n+1} - V_{n+1} < 0$

أي $U_{n+1} < V_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n V_n} \quad (1)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{U_n + V_n}{2} - U_n \quad (V_n < U_n)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} < (V_n - U_n) \times \frac{1}{2}$$

(ب) نبرهن على هذه المتباينة بالفراجه.

- من أجل $n=0$ لدينا $V_0 - U_0 = b - a$ و $V_0 - U_0 \leq (b - a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0$

نفرض أن الخاصية p_n صحيحة أي $(b - a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq V_n - U_n$

ونبرهن أن الخاصية p_{n+1} صحيحة أي $(b - a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq V_{n+1} - U_{n+1}$

$$\text{لدينا } (V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$$

إذن p_{n+1} صحيحة ومنه p_n صحيحة من أجل كل n

(4) (i) تعيين اتجاه تغير المتتالية (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$$

- تعيين اتجاه تغير (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} < 0$$

لأن $V_n - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

إذن (V_n) و (U_n) متجاورتان.

$$(b) \quad (1) \quad \dots \dots \dots \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3 \leq |U_n - V_n| \leq |U_n - \ell| + |V_n - \ell| < 10^{-3} + 10^{-3} < 10^{-3}$$

$$\text{بما أن } |U_n - V_n| \leq 2 \times 10^{-3} \dots \dots (2) \text{ فإن } |U_n - \ell| \leq |U_n - V_n| + |V_n - \ell| < 10^{-3} + 10^{-3} < 10^{-3}$$

حتى تكون (2) محققة يجب أن يكون $2 \times 10^{-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3$

$$\text{أي } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 66 \times 10^{-5} \text{ بالتبسيط نجد } \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{3} \times 10^{-3}$$

ومنه قيمة n التي تحقق المتباينة الأخيرة هي 11 إذن القيمة التقريبية لـ ℓ هي U_{11}

تطبيق 22

لخص المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة } \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ و } U_1 = \frac{2}{7} \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - U_n}$$

(نقبل أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n \neq 0$ و $U_n \neq 3$)

(1) احسب U_2 و U_3 .

$$(2) (a) (V_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } V_n = \frac{1}{U_n} \text{ احسب } V_1$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} = 3V_n - 1$

$$(3) (W_n) \text{ متتالية معرفة بـ } W_n = V_n - \frac{1}{2} \text{ عبر عن } W_{n+1} \text{ بدلالة } W_n$$

ثم عين W_n بدلالة n

(4) (ا) استنتج عبارة U_n بدلالة n

(ب) هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

✓ الحل

$$U_3 = \frac{U_2}{3-U_2} = \frac{\frac{2}{19}}{\frac{55}{19}} = \frac{2}{55} \quad , \quad U_2 = \frac{U_1}{3-U_1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{2}{19} \quad (1)$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{19}{2} \quad (2)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{3-U_n}} = \frac{3-U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n}\right) - 1 = 3V_n - 1 \quad (ب)$$

$$W_n = V_n - \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$W_{n+1} = V_{n+1} - \frac{1}{2} = (3V_n - 1) - \frac{1}{2} = 3V_n - \frac{3}{2} = 3\left(V_n - \frac{1}{2}\right) = 3W_n$$

$$W_1 = V_1 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2} - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

(W_n) متتالية هندسية حدها الأول $W_1 = 9$ وأساسها $r = 3$

ومنه $W_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$ بالتعويض نجد $W_n = W_1 \times r^{n-1}$

$$U_n = \frac{1}{V_n} \quad \text{و} \quad V_n = W_n + \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$U_n = \frac{1}{3^{n+1} + \frac{1}{2}} \quad \text{ومنه} \quad U_n = \frac{1}{W_n + \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (3^{n+1}) = +\infty$$

إذن للمتتالية (U_n) مقاربة نحو الصفر.

تطبيق 23

لنجد المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$ - النهاية والحصر

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n}$$

(1) برهن بالراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \geq 0$

ثم بين أن $U_{n+1} - 3$ و $U_n - 3$ مختلفين في الإشارة.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

(ب) استنتج أنه إذا كانت (U_n) مقاربة فإن نهايتها 3.

(3) استنتج أنه من أجل كل n يكون $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4} |U_n - 3|$ (نقبل أن $U_n \geq 2$)
(4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $|U_n - 3| \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$
(ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

✓ الحل

(1) - من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 1$ والمتباينة $1 > 0$ صحيحة إذن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي $n \geq 0$ أي $U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

بما أن $U_n > 0$ فإن $3U_n + 9 > 0$ و $2U_n > 0$

وبالتالي $U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n} > 0$ أي $U_{n+1} > 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن من أجل كل $n \geq 0$ لدينا $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{3U_n + 9}{2U_n} - 3 = \frac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \frac{3(3 - U_n)}{2U_n}$$

بما أن $2U_n > 0$ فإن $(U_{n+1} - 3)(3 - U_n) > 0$

وبالتالي نستنتج أن $U_{n+1} - 3$ و $U_n - 3$ مختلفين في الإشارة.

(2) نسمي p_n الخاصية " $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$ "

- من أجل $n=0$ يكون $U_0 = 1$ و $U_1 = 6$ و $1 \leq 3 \leq 6$ ومنه p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي $n \geq 0$ أي $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{2n+2} \leq 3 \leq U_{2n+3}$

* نبرهن أولا $U_{2n+2} \leq 3$

$$\text{لدينا} \quad U_{2n+2} = \frac{3U_{2n+1} + 9}{2U_{2n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+1}}$$

$$\text{بما أن} \quad \frac{9}{2U_{2n+1}} \leq \frac{3}{2} \quad \text{فإن} \quad U_{2n+2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \quad \text{أي} \quad U_{2n+2} \leq 3$$

* نبرهن ثانيا $U_{2n+3} \geq 3$

$$U_{2n+3} = \frac{3U_{2n+2} + 9}{2U_{2n+2}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+2}}$$

$$\text{لدينا} \quad \frac{1}{2U_{2n+2}} \geq \frac{1}{6} \quad \text{ومنه} \quad U_{2n+3} \geq 3$$

تطبيق 24

الدوال المستمرة و حساب نهاية متتالية

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n$

(1) احسب U_1, U_2

(2) نرمز بـ f إلى الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

(أ) درس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(ب) برهن أنه إذا كان $x \in [0, 3]$ فإن $f(x) \in [0, 3]$

(3) استنتج من السؤال الثاني أن:

(أ) للمتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3

(ب) للمتتالية (U_n) متزايدة

(4) استنتج أن للمتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

✓ الحل

$$U_2 = -\frac{1}{3}U_1^2 + 2U_1 = \frac{671}{432} \quad , \quad U_1 = -\frac{1}{3}U_0^2 + 2U_0 = \frac{11}{12} \quad (1)$$

(2) (أ) f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 3$$

- إذا كان $x > 3$ فإن f متناقصة تماما.

- إذا كان $x < 3$ فإن f متزايدة تماما.

(ب) إذا كان $0 \leq x \leq 3$ فإن $f(3) \geq f(x) \geq 0$

لأن f دالة متزايدة تماما على $[0, 3]$ و منه $0 \leq f(x) \leq 3$

إذن $f(x) \in [0, 3]$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
تغيرات f		↗ ↘	

(3) (أ) بما أن من أجل كل $x \in [0, 3]$ فإن

$f(x) \in [0, 3]$ فإننا نستطيع تعريف

المتتالية (U_n) بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

- (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3

هذا معناه أنه من أجل كل عددي طبيعي

$n \geq 0$ يكون $U_n \leq 3$

$$\frac{9}{2U_{2n+2}} \geq \frac{3}{2} \quad \text{نجد 9 في 9 بالضرب}$$

$$U_{2n+3} \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{نجد هذه الأخيرة نجد}$$

أي $U_{2n+3} \geq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عددي طبيعي n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \ell$$

و بالتالي $\ell \leq 3$ و منه نجد $\ell = 3$

$$|U_{n+1} - 3| = \frac{3|U_n - 3|}{2U_n} \quad \text{و بالتالي} \quad |U_{n+1} - 3| = \frac{3(3 - U_n)}{2U_n} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2U_n} \leq \frac{3}{4} \quad \text{و منه} \quad 2U_n \geq 4$$

$$\frac{3|U_n - 3|}{2U_n} \leq \frac{3}{4}|U_n - 3| \quad \text{نجد } |U_n - 3|$$

$$\text{أي} \quad |U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4}|U_n - 3|$$

$$(4) (أ) \text{ نسمي } p_n \text{ الخاصية } " |U_n - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n "$$

$$p_0 \text{ صحيحة لأن } |U_0 - 3| = |2 - 3| = 1 \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^0$$

$$\text{نفرض أن } p_n \text{ صحيحة أي } |U_n - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$\text{ونبرهن أن } p_{n+1} \text{ صحيحة أي } |U_{n+1} - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}$$

$$\text{بضرب طرفي المتباينة } |U_n - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n \text{ في } \frac{3}{4} \text{ نجد } \frac{3}{4}|U_n - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}$$

$$\text{أي} \quad |U_{n+1} - 3| \leq 2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عددي طبيعي n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3 \quad \text{و منه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - 3| = 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو 3

نبرهن على هذه التباينة بالتراجع.

نسمي الخاصية p_n $U_n \leq 3$

ومن أجل $n=0$ يكون $U_0 = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \leq 3$

ومنه p_0 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي $n \geq 0$ أي $U_n \leq 3$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \leq 3$

بما أن $0 \leq U_n \leq 3$ فرضا و f متزايدة تماما على المجال $[0, 3]$

فإن $0 \leq f(U_n) \leq 3$ أي $U_{n+1} \leq 3$

إذن p_{n+1} صحيحة.

وعليه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

$$(ب) \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n - U_n$$

$$= -\frac{1}{3}U_n(U_n - 3)$$

بما أن $U_n \leq 3$ فإن $U_n - 3 \leq 0$ وبالتالي $-\frac{1}{3}U_n(U_n - 3) \geq 0$

أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

(4) بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$\text{وعليه } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$$

- حساب ℓ

بما أن f دالة مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة عند ℓ

وعليه ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \text{ يكافئ } (x=3) \text{ أو } (x=0)$$

$\ell = 0$ مرفوض لأن الحد الأول للمتتالية هو $\frac{1}{2}$ و المتتالية متزايدة إذن $\ell = 3$

تطبيق 25

الدوال المستمرة وحساب نهايات

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$$

(1) برهن بالتراجع أن (U_n) متزايدة.

(ب) استنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2. هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

(2) أوجد نهاية للمتتالية (U_n)

✓ الحل

(1) (أ) (U_n) متزايدة يعني من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ يكون $U_{n+1} - U_n \geq 0$

نسمي الخاصية p_n $U_{n+1} - U_n \geq 0$

- من أجل $n=0$ يكون $U_1 - U_0 = \sqrt{3} - 1 > 0$ و $\sqrt{3} - 1 > 0$

ومنه p_0 صحيحة.

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$

المتباينة $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$ تعني $U_{n+1} \geq U_n$

بإضافة 2 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{n+1} + 2 \geq U_n + 2$

$$\text{بجذر الطرفين نجد } \sqrt{U_{n+1} + 2} \geq \sqrt{U_n + 2}$$

أي $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

ومنه $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$ إذن p_{n+1} صحيحة.

ومنه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

$$(ب) \quad U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} = \frac{-(U_n - 2)(U_n + 1)}{U_n + \sqrt{2 + U_n}}$$

- بما أن $U_n + \sqrt{2 + U_n} > 0$ و $U_n + 1 > 0$ و $U_{n+1} - U_n \geq 0$ فإن $-(U_n - 2) \geq 0$

ومنه نستنتج $U_n \leq 2$ وهذا يعني أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(2) بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

- بما أن الدالة $f: x \mapsto \sqrt{2 + x}$ مستمرة عند العدد الحقيقي ℓ فإن ℓ يحل للمعادلة

$$x = f(x)$$

$$x = f(x) \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0 \text{ يكافئ } x = 2 \text{ أو } x = -1$$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell = 2$

تمارين و مسائل



1- المتتالية (U_n) معرفة من أجل $n \geq 3$ بـ $U_n = \frac{4n+2}{n-2}$ لها نهاية عند 4. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل $n > n_0$ يكون $U_n \in]3.99, 4.01[$

2- المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_n = n^2 - n$ لها نهاية $+\infty$. أوجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in]10^8, +\infty[$

3- المتتالية معرفة بـ $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$. احسب U_n من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

4- المتتالية معرفة من أجل كل n بالعبارة $U_n = \frac{1}{n!}$.
(1) احسب $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$.
(2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{1}{n} \geq U_n > 0$.
(3) استنتج نهاية (U_n) .

5- متتالية معرفة بـ $U_n = n+1 - \sin n$. بين من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n \leq U_n \leq n+2$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

6- متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{n^4}{n!}$ من أجل كل $n \geq 1$.
(1) احسب الحدود السبعة الأولى.
(2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون $n! \geq (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.
(ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

7- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :

(أ) $U_n = \frac{n+5}{2n+1}$ (ب) $U_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ (ج) $U_n = -n^2 + \frac{3}{2n+2}$
(د) $U_n = \frac{6n^2-3n+9}{n^2+n+3}$ (و) $U_n = \frac{7n+5}{2n^2+3}$ (ي) $U_n = \frac{6n^2+2}{7n+3}$

8- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :

(أ) $U_n = \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ (ب) $\sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$ (ج) $U_n = 1 - \frac{3}{n!}$
(د) $U_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$ (و) $U_n = \sqrt{2n^4+n^3} - \sqrt{2n^4}$ (ي) $U_n = \frac{5n-25n^2+1}{\sqrt{n^2+6}}$

9- أوجد نهاية كل متتالية من المتتاليات (U_n) , (V_n) , (W_n) , (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم بالعبارات التالية:

$t_n = \frac{V_n-1}{W_n-1}$, $W_n = U_n - n + 2$, $V_n = \frac{U_n}{n+1}$, $U_n = \frac{n^2+2}{n+3}$

10- (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ:

$V_n = U_n - \frac{20}{3}$ و $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 5$ و $U_0 = 4$

(1) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية. (ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n .

(2) نضع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

احسب S_n و S'_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتاليتين (S_n) و (S'_n) .

11- في كل حالة من الحالات التالية عين بيانا الجذور الأولى للمتتاليات المقترحة ثم خمن اتجاه تغير و نهاية هذه المتتالية:

(أ) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2 \end{cases}$

12- ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $U_n = 2n^2 - 3n + 4$ (ب) $U_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n}$ (ج) $U_n = 5(0.3)^n$

$$(د) \quad U_n = \frac{5^n}{7^n} \quad (و) \quad U_n = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \times (0,2)^n$$

$$(13) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل } n \geq 4 \text{ بـ } U_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$

بين أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$

(يمكنك الاستعانة بدراسة الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 6$.)

(14) في كل حالة من الحالات التالية هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

$$(أ) \quad U_n = \cos n \quad (ب) \quad U_n = 3 - \frac{1}{n} \quad (ج) \quad U_n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$(د) \quad U_n = \sqrt{5n+3} \quad (و) \quad U_n = n+2 + \cos n$$

(15) ادرس تقارب أو تباعد كل متتالية من المتتاليات التالية باستعمال نظريات الحصر :

$$(أ) \quad U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sin(3n) \quad (ب) \quad U_n = \frac{n+1}{3 + \cos 2n}$$

$$(ج) \quad U_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 3} \quad (د) \quad U_n = \frac{2^n + 1}{3^{n+2} - 1}$$

$$(16) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بالعبارة } U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

(1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

(2) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

(ب) ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (U_n) ؟

$$(17) \quad U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \text{ نضع } n \text{ عدد طبيعي}$$

(1) أوجد العددين الحقيقيين A و B بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$U_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

عين عبارة S_n بدلالة n ثم أوجد نهاية المتتالية (S_n) .

(18) ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

$$(أ) \quad U_n = \frac{n!}{2^n - 1} \quad (ب) \quad U_n = \frac{n!}{4^n} \quad (ج) \quad U_n = \frac{2^n + 3}{4^n}$$

$$(19) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } \begin{cases} U_0 = 2 \\ 4U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$$

(1) عين الستة الحدود الأولى و عين القيمة ℓ التي تقترب منها هذه الحدود.

(2) لتكن (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n = U_n - \ell$ برهن أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

(20) احب بنعم أو لا عن كل سؤال من الأسئلة للطروحة مبرر الإجابة.

لتكن (U_n) متتالية معرفة بحددها الأول U_0 ينتمي إلى مجال $[1 + \infty[$ و العلاقة

$$U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) (U_n) رتيبة

(2) (U_n) محدودة من الأسفل بالواحد.

(3) إذا كان $U_0 \in]1, 2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 1.

(4) إذا كان $U_0 \in]2, +\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

(5) إذا كان $U_0 \in]2, +\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

$$(21) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = U_n - \frac{1}{3}(U_n)^3$$

(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \in [0, 1]$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$(22) \quad (U_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n^2}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} < \frac{U_n}{2}$ ثم استنتج أن $U_n < \frac{U_0}{2^n}$

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$(23) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ}$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

- (1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
 (2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

24 - (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

- (1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq U_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

- (2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟
 (3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بالعبارة :

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ما هي نهاية } (V_n) \text{ ؟}$$

25 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n + 1)$

- (1) برهن أن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل n بـ $V_n = 2 - U_n$ هندسية.
 (2) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم نهاية (U_n) .

26 - (U_n) و (V_n) متتايلتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$ و $V_n = U_n + 3$

- (1) برهن أن (V_n) هندسية.
 (2) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (U_n) .
 (3) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (S_n) .

27 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3}$ و (V_n) متتالية

- معرفة على \mathbb{N} بـ $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.
 (1) أوجد α بحيث (V_n) هندسية.
 (2) هل (V_n) متقاربة.

- (3) عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $V_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ثم استنتج قيمة

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

28 - ندرس عدد البكتيريا السببية لمرض التفويد في لتر واحد من ماء يحتوي في البداية على 300 بكتيريا. لاحظنا أنه في كل دقيقة يزداد عدد البكتيريا بالعامل 1.0372 مع العلم أنه في كل دقيقة تموت بكتيريا واحدة.

(1) إذا رمزنا بـ U_n إلى عدد البكتيريا الحية حتى الدقيقة n اكتب U_{n+1} بدلالة n

$$(2) \text{ نضع } V_n = U_n - \frac{1}{0.037}$$

- (أ) بين أن (V_n) هندسية ثم احسب حدها العام بدلالة n .
 (ب) ما هو عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

(3) نريد تحسين هذه الدراسة بحيث ولا بكتيريا تموت خلال التجربة. ولتكن W_n عدد البكتيريا الموجودة خلال n دقيقة.

عبر عن W_n بدلالة n ثم احسب عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.

كم عدد البكتيريا التي تم انقاضها ؟

29 - (U_n) و (V_n) متتايلتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$$

هل المتتايلتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

30 - (U_n) و (V_n) متتايلتان معرفتان على \mathbb{N}^* بـ $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$$V_n = U_n + \frac{1}{n!} \text{ و}$$

- (1) بين أن المتتايلتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.
 (2) احسب U_7 و V_7 ثم استنتج قيمة مقربة للنهية المشتركة ℓ .
 (3) بين أن ℓ ليس عددا ناطقا. (استعمل البرهان بالخلف)
 ثم تحقق من أن $U_0 < \ell < V_0$

31 - (U_n) و (V_n) متتايلتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $U_0 = -1$ و $V_0 = 2$.

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ و } V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}$$

- (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن $U_n < V_n$.
 (ب) برهن أن المتتايلتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

(2) أوجد العددين الحقيقيين المختلفين a و b

بحيث أن المتتايلتين (S_n) و (I_n) للعرفتين على \mathbb{N} بـ :

$$I_n = U_n + bV_n \text{ و } S_n = U_n + aV_n \text{ هندسيان (ثابتان).}$$

(3) عبر عن S_n و I_n بدلالة n .

(ب) احسب نهاية المتتايلتين (U_n) و (V_n) .

32 -

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = -3$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

(1) مثل بياننا الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$

(ب) استعمل النجنى البياني للدالة f لتحمين طبيعة المتتالية (U_n).

(2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n < 1$

(3) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة

(4) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = 1 - U_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} < \frac{1}{7} V_n$ ثم استنتج نهاية (V_n)

(5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

(ب) أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n > n_0$ يكون $U_n > 0.99$

33 -

(U_n) و (V_n) متتايتان معرفتان بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5}{2U_n}$ و $V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}$

(1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ يكون $V_{n+1} = V_n^2$

(ب) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $V_n = (V_0)^{2^n}$

(2) احسب V_0 ثم برهن أن $|V_0| \leq \frac{1}{16}$

(ب) عيّن نهاية المتتالية (V_n) ، (ج) استنتج نهاية المتتالية (U_n).

34 -

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_1 = \frac{3}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{2}{U_n} \right)$

(1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n > 0$

(2) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{(U_n - \sqrt{2})^2}{U_n}$

ثم استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n > \sqrt{2}$

(3) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$

(4) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

35 -

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}$

(1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3

(2) برهن أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 ماذا تستنتج ؟

(3) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟ (لحساب النهاية استعن بالدالة $f(x) \rightarrow \sqrt{x+6}$)

36 -

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = \frac{-5}{4}$ و $U_{n+1} = \sqrt{5 + 4U_n}$

(1) ارسم (C_f) بيان الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{5 + 4x}$ ثم عيّن نقطة تقاطع

(C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$

(2) نفرض في هذا السؤال أن $U_0 = 6$

(ا) برهن أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل.

(ب) ادرس تغيرات المتتالية (U_n) ثم استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها.

(3) برهن أن النتائج المحصل عليها سابقا (في السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 > 5$

(ب) هل نتائج (السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 < 5$ ؟

(ج) ماذا تصيح المتتالية في حالة $U_0 = 5$ ؟

37 -

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $2 \geq U_n \geq \frac{3}{2}$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

برهن أنه من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ومن أجل كل $y \geq \frac{3}{2}$ يكون :

$$(1) \dots \dots \dots |f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9} < |x - y|$$

(3) ا إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فما هي قيمة نهايتها ؟

(ب) برهن باستعمال (1) أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $|U_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |U_n - \ell|$

(ج) استنتج بالتراجع أن $|U_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |U_1 - \ell|$

(د) برهن عنئذ أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

38 -

(U_n) و (V_n) متتايتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$U_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$